Zéros de champs gaussiens stationnaires

Thomas Letendre (LMO)
en collaboration avec M. Ancona

Lille – 05 février 2021

Zéros d'un champ gaussien stationnaire

Champ gaussien stationnaire sur $\mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ champ gaussien stationnaire centré de classe $\mathcal{C}^p$ ($p \geqslant 1$).

Sa fonction de corrélation $\kappa : z \mapsto \mathbb{E}[f(0)f(z)]$ est $\mathcal{C}^{2p}$ et paire.

Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $k, l \in \{0, \ldots, p\}$,

$$\mathbb{E}\left[f^{(k)}(x)f^{(l)}(y)\right] = (-1)^k \kappa^{(k+l)}(y - x).$$

Champ gaussien stationnaire sur $\mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ champ gaussien stationnaire centré de classe $\mathcal{C}^p$ ($p \geqslant 1$).

Sa fonction de corrélation $\kappa : z \mapsto \mathbb{E}[f(0)f(z)]$ est $\mathcal{C}^{2p}$ et paire.

Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $k, l \in \{0, \ldots, p\}$,

$$\mathbb{E}\left[f^{(k)}(x)f^{(l)}(y)\right] = (-1)^k \kappa^{(k+l)}(y - x).$$

Normalisation

$$\mathrm{Var}(f(x)) = \kappa(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}\big(f'(x)\big) = -\kappa''(0) = 1.$$

Exemple : f_{BF} champ de Bargmann–Fock, lisse, $\kappa_{\mathrm{BF}} : z \mapsto e^{-\frac{1}{2}z^2}$.

Mesures aléatoires et statistiques linéaires

Lemme (Bulinskaya, 1961)

Presque surement, $Z = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}$ *est fermé et discret.*

Pour $R > 0$, on note $\nu_R = \sum_{Rx \in Z} \delta_x$ la mesure de comptage de $\frac{1}{R} Z$.

Pour $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction-test : $\langle \nu_R \, , \phi \rangle = \displaystyle\sum_{Rx \in Z} \phi(x) = \sum_{x \in Z} \phi\left(\frac{x}{R}\right)$.

$$N_R = \mathrm{card}\left(Z \cap [0, R]\right) = \left\langle \nu_R \, , \mathbf{1}_{[0,1]} \right\rangle .$$

Mesures aléatoires et statistiques linéaires

Lemme (Bulinskaya, 1961)

Presque surement, $Z = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}$ *est fermé et discret.*

Pour $R > 0$, on note $\nu_R = \sum_{Rx \in Z} \delta_x$ la mesure de comptage de $\frac{1}{R} Z$.

Pour $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction-test : $\langle \nu_R \, , \phi \rangle = \displaystyle\sum_{Rx \in Z} \phi(x) = \sum_{x \in Z} \phi\left(\frac{x}{R}\right)$.

$$N_R = \operatorname{card}\left(Z \cap [0, R]\right) = \left\langle \nu_R \, , \mathbf{1}_{[0,1]} \right\rangle .$$

Remarque

$\langle \nu_R \, , \phi \rangle$ est bien définie preque surement si ϕ est positive ou si $\phi \in L^1(\mathbb{R})$.

Résultats connus pour N_R

Rice (1945) : $\mathbb{E}[N_R] = \frac{R}{\pi}$.

Cuzick (1976) : Si f est $\mathcal{C}^2$ et $\kappa, \kappa'' \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\frac{1}{R}\operatorname{Var}(N_R) \xrightarrow[R\to+\infty]{} \sigma^2$.

Si de plus $\sigma > 0$, alors $\frac{1}{\sqrt{R}\sigma}\left(N_R - \frac{R}{\pi}\right) \xrightarrow[R\to+\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$.

Kratz–Leòn (1997) : On a $\sigma > 0$.

Nazarov–Sodin (2016) : Si f est $\mathcal{C}^2$ et $\kappa(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} 0$, alors $\frac{N_R}{R} \xrightarrow[R\to+\infty]{\text{p.s.}} \frac{1}{\pi}$.

Basu–Dembo–Feldheim–Zeitouni (2018) : Grandes déviations pour N_R, pour f analytique dans une bande $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\Im(z)| \leqslant \varepsilon\right\}$.

Décorrélation asymptotique

On supposera toujours $\kappa(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Lemme

Sous cette condition, $\left(f^{(k_1)}(x_1), \ldots, f^{(k_m)}(x_m)\right)$ *est non-dégénéré pour tout* $(k_1, x_1), \ldots, (k_m, x_m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ *distincts.*

Décorrélation asymptotique

On supposera toujours $\kappa(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Lemme

Sous cette condition, $\left(f^{(k_1)}(x_1), \ldots, f^{(k_m)}(x_m)\right)$ *est non-dégénéré pour tout* $(k_1, x_1), \ldots, (k_m, x_m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ *distincts.*

Définition (Normes $\mathcal{C}^{2p}$)

Pour tout $\eta \geqslant 0$ on note :

$$\|\kappa\|_{2p,\eta} = \max\left\{\left|\kappa^{(l)}(x)\right| \;\middle|\; 0 \leqslant l \leqslant 2p, |x| \geqslant \eta\right\}.$$

On a $\|\kappa\|_{2p,\eta} \leqslant \|\kappa\|_{2p,0} = \max\left\{\left|\kappa^{(2l)}(0)\right| \;\middle|\; 0 \leqslant l \leqslant p\right\}$.

Moments des statistiques linéaires

Espérance des statistiques linéaires

Proposition

Si f est $\mathcal{C}^1$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable et positive ou dans $L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $R > 0$:

$$\mathbb{E}[\langle \nu_R \,, \phi \rangle] = \frac{R}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \, \mathrm{d}x.$$

En particulier, $\mathbb{E}[\nu_R] = \frac{R}{\pi} \mathrm{d}x$ et tant que mesure de Radon.

Fonctions-test et moments

Fonction-test

On considère $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, continue presque partout.

Exemples :

- $\phi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$,
- $\mathbf{1}_I$, avec I intervalle borné.
- $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

Fonctions-test et moments

Fonction-test

On considère $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, continue presque partout.

Exemples :

- $\phi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$,
- $\mathbf{1}_I$, avec I intervalle borné.
- $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

Moment centré d'ordre $p \geqslant 2$

Soient $\phi_1, \dots, \phi_p$ des fonctions-test, on note :

$$m_p(\nu_R)(\phi_1, \dots, \phi_p) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{p} \Big(\langle \nu_R \,, \phi_i \rangle - \mathbb{E}[\langle \nu_R \,, \phi_i \rangle] \Big)\right].$$

Exemple : $m_2(\nu_R)(\phi_1, \phi_2)$ est la covariance de $\langle \nu_R \,, \phi_1 \rangle$ et $\langle \nu_R \,, \phi_2 \rangle$.

Structure de covariance

Proposition

On suppose que f *est* $\mathcal{C}^2$, *que* κ *et* $\kappa'' \in L^2(\mathbb{R})$ *et que* $\|\kappa\|_{2,\eta} \xrightarrow[\eta\to+\infty]{} 0$.
Alors il existe $\sigma > 0$ *telle que pour toutes* ϕ_1, ϕ_2 *fonctions-test :*

$$m_2(\nu_R)(\phi_1, \phi_2) = R\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(x)\phi_2(x)\,\mathrm{d}x + o(R).$$

Exemple : $\phi_1 = \mathbf{1}_{[0,1]}$ et $\phi_2 = \mathbf{1}_{[1,2]}$

$\mathrm{card}(Z \cap [0, R])$ et $\mathrm{card}(Z \cap [R, 2R])$ sont asymptotiquement décorrélés.

Partitions en paires

Définitions

- Une *partition* de $\{1,\dots,p\}$ est une famille $\mathcal{I}$ de parties de $\{1,\dots,p\}$ non-vides, disjointes, et telles que $\bigsqcup_{I\in\mathcal{I}} I = \{1,\dots,p\}$.
- On parle de *partition en paires* si $|I| = 2$ pour tout $I \in \mathcal{I}$.
- $\mathcal{P}_p$ (resp. $\mathcal{PP}_p$) ensemble des partitions (resp. en paires) de $\{1,\dots,p\}$.

$$\mathrm{card}(\mathcal{PP}_p) = \mathbb{E}[\mathcal{N}(0,1)^p] = \begin{cases} \dfrac{p!}{2^{\frac{p}{2}}\left(\frac{p}{2}\right)!} & \text{si } p \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Asymptotiques des moments centrés

Théorème (Ancona–L., 2020)

Soit $p \geqslant 3$, on suppose $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R})$ et $\|\kappa\|_{2p,\eta} = o(\eta^{-4p})$ quand $\eta \to +\infty$. Pour toutes $\phi_1, \dots, \phi_p$ fonctions-test on a :

$$m_p(\nu_R)(\phi_1, \dots, \phi_p) = \sum_{\mathcal{I} \in \mathcal{PP}_p} \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{I}} m_2(\nu_R)(\phi_i, \phi_j) + o(R^{\frac{p}{2}}).$$

En particulier,

$$m_p(\nu_R)(\phi, \dots, \phi) = \mathbb{E}[\mathcal{N}(0,1)^p] \operatorname{Var}(\langle \nu_R \,, \phi \rangle)^{\frac{p}{2}} + o(R^{\frac{p}{2}}).$$

Conséquences des asymptotiques de moments

Corollaire (Concentration)

Si f est $\mathcal{C}^{2p}$ et $\|\kappa\|_{4p,\eta} = o(\eta^{-8p})$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{R}N_R - \frac{1}{\pi}\right| > \varepsilon\right) = O(R^{-p}).$$

Corollaire (Théorème central limite fonctionnel)

Si $\kappa \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors on a dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$\frac{1}{\sqrt{R\sigma}}\left(\nu_R - \frac{R}{\pi}\,\mathrm{d}x\right) \xrightarrow[R\to+\infty]{loi} W.$$

Formules de Kac–Rice

et

fonctions à p points

Formules de Kac–Rice

Soient $R > 0$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\phi_1, \dots, \phi_p$ des fonctions-test, on a :

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{p} \langle \nu_R \, , \phi_i \rangle\right] = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\prod_{i=1}^{p} \phi_i\left(\frac{x_i}{R}\right)\right) \rho_p(x_1, \dots, x_p)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_p,$$

où $\rho_p(x_1, \dots, x_p) = \dfrac{\mathbb{E}\left[|f'(x_1)| \dots |f'(x_p)| \,\middle|\, f(x_1) = \cdots = f(x_p) = 0\right]}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \det\left(\operatorname{Var}(f(x_1), \dots, f(x_p))\right)^{\frac{1}{2}}}.$

Formules de Kac–Rice

Soient $R > 0$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\phi_1, \ldots, \phi_p$ des fonctions-test, on a :

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{p} \langle \nu_R \,, \phi_i \rangle\right] = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\prod_{i=1}^{p} \phi_i\left(\frac{x_i}{R}\right)\right) \rho_p(x_1, \ldots, x_p)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_p,$$

où $\rho_p(x_1, \ldots, x_p) = \dfrac{\mathbb{E}\left[|f'(x_1)| \ldots |f'(x_p)| \,\middle|\, f(x_1) = \cdots = f(x_p) = 0\right]}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \det\left(\mathrm{Var}(f(x_1), \ldots, f(x_p))\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Remarques

- Connues au moins depuis Cramer–Leadbetter (1967).
- $\rho_1 \equiv \frac{1}{\pi}$
- ρ_p est définie sur $\{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ deux à deux distincts$\}$.
- Si ρ_p est bornée, l'intégrale est $O(R^p)$.

Fonctions à p points

ρ_p est la fonction à p points du processus ponctuel Z.

Pour tout $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$ distincts,

$$\frac{1}{(2\varepsilon)^p}\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{p} \operatorname{card}\left(Z \cap [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]\right)\right] \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \rho_p(x_1, \ldots, x_p).$$

Fonctions à p points

ρ_p est la fonction à p points du processus ponctuel Z.

Pour tout $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ distincts,

$$\frac{1}{(2\varepsilon)^p}\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{p} \operatorname{card}\left(Z \cap [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]\right)\right] \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \rho_p(x_1, \dots, x_p).$$

Théorème (Ancona–L., 2020)

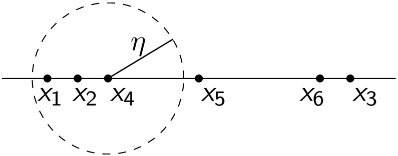
Si f est $\mathcal{C}^p$ et $\|\kappa\|_{2p,\eta} \xrightarrow[\eta \to +\infty]{} 0$, alors il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ distincts :

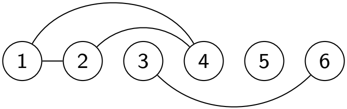
$$\rho_p(x_1, \dots, x_p) \leqslant C \prod_{i<j} \min\left(|x_i - x_j|, 1\right).$$

Graphes et partitions

Soient $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $\eta \geqslant 0$ on définit un graphe $G_\eta(\underline{x})$ par :

- les sommets sont $\{1, \ldots, p\}$,
- une arête joint i et j si et seulement si $i \neq j$ et $|x_i - x_j| \leqslant \eta$.

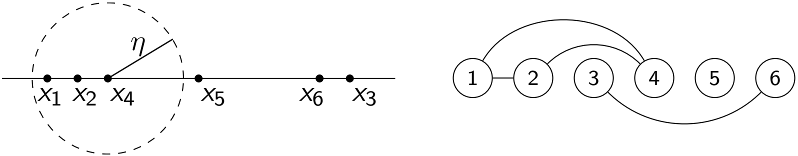




Graphes et partitions

Soient $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $\eta \geqslant 0$ on définit un graphe $G_\eta(\underline{x})$ par :

- les sommets sont $\{1, \ldots, p\}$,
- une arête joint i et j si et seulement si $i \neq j$ et $|x_i - x_j| \leqslant \eta$.



$\mathcal{I}_\eta(\underline{x}) \in \mathcal{P}_p$ est la partition définie par les composantes connexes de $G_\eta(\underline{x})$.

Exemple : $\mathcal{I}_\eta(\underline{x}) = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 6\}, \{5\}\} \in \mathcal{P}_6$.

Singularités des fonctions à p points

Définition

Soient $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$ et $\eta \geqslant 0$, on note $\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^p \mid \mathcal{I}_\eta(\underline{x}) = \mathcal{I}\}$.

Exemple : $\underline{x} \in \mathbb{R}^p_{\mathcal{I},0}$ signifie que $(x_i = x_j \Leftrightarrow \exists I \in \mathcal{I}$ tel que $i, j \in I)$.

Singularités des fonctions à p points

Définition

Soient $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$ et $\eta \geqslant 0$, on note $\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^p \mid \mathcal{I}_\eta(\underline{x}) = \mathcal{I}\}$.

Exemple : $\underline{x} \in \mathbb{R}^p_{\mathcal{I},0}$ signifie que $(x_i = x_j \Leftrightarrow \exists I \in \mathcal{I}$ tel que $i,j \in I)$.

Théorème (Ancona–L., 2020)

On suppose que f est $\mathcal{C}^p$ et $\|\kappa\|_{2p,\eta} \xrightarrow[\eta \to +\infty]{} 0$.

Soient $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$ et $\underline{y} \in \mathbb{R}^p_{\mathcal{I},0}$, il existe $\ell(\underline{y}) > 0$ telle que, lorsque $\underline{x} \to \underline{y}$,

$$\rho_p(\underline{x}) \sim \ell(\underline{y}) \prod_{I \in \mathcal{I}} \prod_{\{(i,j) \in I^2 \mid i<j\}} |x_i - x_j| \,.$$

Clustering

Soit $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_p)$, pour tout $I \subset \{1, \ldots, p\}$, on note $\underline{x}_I = (x_i)_{i \in I}$.

Théorème (Ancona–L., 2020)

On suppose que f *est* $\mathcal{C}^p$ *et* $\|\kappa\|_{2p,\eta} \xrightarrow[\eta \to +\infty]{} 0$.

Uniformément pour tout $\eta \geqslant 1$, *tout* $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$ *et tout* $\underline{x} \in \mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta}$ *on a :*

$$\rho_p(\underline{x}) = \left(\prod_{I \in \mathcal{I}} \rho_{|I|}(\underline{x}_I) \right) \left(1 + O\left(\sqrt{\|\kappa\|_{2p,\eta}} \right) \right)$$

Clustering implique asymptotique des moments

Expression des moments centrés

$$m_p(\nu_R)(\phi_1, \ldots, \phi_p) = \sum_{I \subset \{1,\ldots,p\}} (-1)^{p-|I|} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in I} \langle \nu_R \,, \phi_i \rangle\right] \prod_{i \notin I} \mathbb{E}[\langle \nu_R \,, \phi_i \rangle]$$

Expression des moments centrés

$$\begin{aligned} m_p(\nu_R)(\phi_1, \ldots, \phi_p) &= \sum_{I \subset \{1,\ldots,p\}} (-1)^{p-|I|} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in I} \langle \nu_R \,, \phi_i \rangle\right] \prod_{i \notin I} \mathbb{E}[\langle \nu_R \,, \phi_i \rangle] \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\prod_{i=1}^{p} \phi_i \left(\frac{x_i}{R}\right)\right) \left(\sum_{I \subset \{1,\ldots,p\}} (-1)^{p-|I|} \rho_{|I|}(\underline{x}_I) \prod_{i \notin I} \rho_1(x_i)\right) \mathrm{d}\underline{x} \end{aligned}$$

Expression des moments centrés

$$
\begin{aligned}
m_p(\nu_R)(\phi_1, \ldots, \phi_p) &= \sum_{I \subset \{1,\ldots,p\}} (-1)^{p-|I|} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in I} \langle \nu_R \,, \phi_i \rangle\right] \prod_{i \notin I} \mathbb{E}[\langle \nu_R \,, \phi_i \rangle] \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\prod_{i=1}^{p} \phi_i\left(\frac{x_i}{R}\right)\right) \left(\sum_{I \subset \{1,\ldots,p\}} (-1)^{p-|I|} \rho_{|I|}(\underline{x}_I) \prod_{i \notin I} \rho_1(x_i)\right) \mathrm{d}\underline{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\prod_{i=1}^{p} \phi_i\left(\frac{x_i}{R}\right)\right) F_p(\underline{x}) \, \mathrm{d}\underline{x}.
\end{aligned}
$$

Expression des moments centrés

$$
\begin{aligned}
m_p(\nu_R)(\phi_1,\dots,\phi_p) &= \sum_{I\subset\{1,\dots,p\}} (-1)^{p-|I|}\mathbb{E}\left[\prod_{i\in I}\langle \nu_R\,,\phi_i\rangle\right]\prod_{i\notin I}\mathbb{E}[\langle \nu_R\,,\phi_i\rangle] \\
&= \int_{\mathbb{R}^p}\left(\prod_{i=1}^{p}\phi_i\left(\frac{x_i}{R}\right)\right)\left(\sum_{I\subset\{1,\dots,p\}} (-1)^{p-|I|}\,\rho_{|I|}(\underline{x}_I)\prod_{i\notin I}\rho_1(x_i)\right)\mathrm{d}\underline{x} \\
&= \sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{P}_p}\int_{\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta}}\left(\prod_{i=1}^{p}\phi_i\left(\frac{x_i}{R}\right)\right)F_p(\underline{x})\,\mathrm{d}\underline{x}.
\end{aligned}
$$

Expression des moments centrés

$$
\begin{aligned}
m_p(\nu_R)(\phi_1,\dots,\phi_p) &= \sum_{I\subset\{1,\dots,p\}} (-1)^{p-|I|}\mathbb{E}\left[\prod_{i\in I}\langle \nu_R\,,\phi_i\rangle\right]\prod_{i\notin I}\mathbb{E}[\langle \nu_R\,,\phi_i\rangle] \\
&= \int_{\mathbb{R}^p}\left(\prod_{i=1}^{p}\phi_i\left(\frac{x_i}{R}\right)\right)\left(\sum_{I\subset\{1,\dots,p\}}(-1)^{p-|I|}\,\rho_{|I|}(\underline{x}_I)\prod_{i\notin I}\rho_1(x_i)\right)\mathrm{d}\underline{x} \\
&= \sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{P}_p}\int_{\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta(R)}}\left(\prod_{i=1}^{p}\phi_i\left(\frac{x_i}{R}\right)\right)F_p(\underline{x})\,\mathrm{d}\underline{x}.
\end{aligned}
$$

Expression des moments centrés

$$m_p(\nu_R)(\phi_1, \ldots, \phi_p) = \sum_{I \subset \{1,\ldots,p\}} (-1)^{p-|I|} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in I} \langle \nu_R \,, \phi_i \rangle\right] \prod_{i \notin I} \mathbb{E}[\langle \nu_R \,, \phi_i \rangle]$$

$$= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\prod_{i=1}^p \phi_i \left(\frac{x_i}{R}\right)\right) \left(\sum_{I \subset \{1,\ldots,p\}} (-1)^{p-|I|} \rho_{|I|}(\underline{x}_I) \prod_{i \notin I} \rho_1(x_i)\right) \mathrm{d}\underline{x}$$

$$= \sum_{\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p} \int_{\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta(R)}} \left(\prod_{i=1}^p \phi_i \left(\frac{x_i}{R}\right)\right) F_p(\underline{x}) \, \mathrm{d}\underline{x}.$$

Comme $\|\kappa\|_{2p,\eta} = o(\eta^{-4p})$, il existe une fonction $R \mapsto \eta(R)$ telle que :

- $\eta(R) \to +\infty$,
- $\eta(R) = o(R^{\frac{1}{4}})$,
- $\|\kappa\|_{2p,\eta(R)} = o(R^{-p})$.

Partitions avec un singleton

Soit $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$ telle que $\{p\} \in \mathcal{I}$. Uniformément sur $\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta(R)}$, on a :

$$\begin{aligned} F_p(\underline{x}) &= \sum_{I \subset \{1,\dots,p-1\}} \left(-\frac{1}{\pi}\right)^{p-|I|-1} \left(\rho_{|I|+1}(\underline{x}_I, x_p) - \rho_{|I|}(\underline{x}_I)\rho_1(x_p)\right) \\ &= o(R^{-\frac{p}{2}}). \end{aligned}$$

Partitions avec un singleton

Soit $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$ telle que $\{p\} \in \mathcal{I}$. Uniformément sur $\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta(R)}$, on a :

$$\begin{aligned} F_p(\underline{x}) &= \sum_{I \subset \{1,\ldots,p-1\}} \left(-\frac{1}{\pi}\right)^{p-|I|-1} \left(\rho_{|I|+1}(\underline{x}_I, x_p) - \rho_{|I|}(\underline{x}_I)\rho_1(x_p)\right) \\ &= o(R^{-\frac{p}{2}}). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta(R)}} \left(\prod_{i=1}^{p} \phi_i \left(\frac{x_i}{R}\right)\right) F_p(\underline{x}) \, \mathrm{d}\underline{x} \right| &\ll R^{-\frac{p}{2}} \int_{\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta(R)}} \prod_{i=1}^{p} \left|\phi_i \left(\frac{x_i}{R}\right)\right| \mathrm{d}\underline{x} \\ &\ll R^{\frac{p}{2}} \int_{\mathbb{R}^p} \prod_{i=1}^{p} |\phi_i(x_i)| \, \mathrm{d}\underline{x}. \end{aligned}$$

Partitions sans singletons

Utilisant le clustering, on a $F_p(\underline{x}) \simeq \prod_{I\in\mathcal{I}} F_{|I|}(\underline{x}_I)$ uniformément sur $\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta(R)}$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta(R)}} \left(\prod_{i=1}^{p} \phi_i\left(\frac{x_i}{R}\right)\right) F_p(\underline{x})\,\mathrm{d}\underline{x} &\simeq \int_{\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta(R)}} \prod_{I\in\mathcal{I}} \left(F_{|I|}(\underline{x}_I) \prod_{i\in I} \phi_i\left(\frac{x_i}{R}\right)\right) \mathrm{d}\underline{x} \\ &\simeq \prod_{I\in\mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}^I_{\{I\},\eta(R)}} \left(\prod_{i\in I} \phi_i\left(\frac{x_i}{R}\right)\right) F_{|I|}(\underline{x}_I)\,\mathrm{d}\underline{x}_I.\end{aligned}$$

Partitions sans singletons

Utilisant le clustering, on a $F_p(\underline{x}) \simeq \prod_{I \in \mathcal{I}} F_{|I|}(\underline{x}_I)$ uniformément sur $\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta(R)}$.

$$\int_{\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta(R)}} \left(\prod_{i=1}^{p} \phi_i \left(\frac{x_i}{R} \right) \right) F_p(\underline{x}) \, \mathrm{d}\underline{x} \simeq \int_{\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta(R)}} \prod_{I \in \mathcal{I}} \left(F_{|I|}(\underline{x}_I) \prod_{i \in I} \phi_i \left(\frac{x_i}{R} \right) \right) \mathrm{d}\underline{x}$$
$$\simeq \prod_{I \in \mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}^I_{\{I\},\eta(R)}} \left(\prod_{i \in I} \phi_i \left(\frac{x_i}{R} \right) \right) F_{|I|}(\underline{x}_I) \, \mathrm{d}\underline{x}_I.$$

Si $I = \{i, j\}$, le facteur correspondant est :

$$\int_{|x_i - x_j| \leqslant \eta(R)} \phi_i \left(\frac{x_i}{R} \right) \phi_j \left(\frac{x_j}{R} \right) F_2(x_i, x_j) \, \mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}x_j \simeq m_2(\nu_R)(\phi_i, \phi_j) = O(R).$$

Partitions sans singletons

Utilisant le clustering, on a $F_p(\underline{x}) \simeq \prod_{I \in \mathcal{I}} F_{|I|}(\underline{x}_I)$ uniformément sur $\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta(R)}$.

$$\int_{\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta(R)}} \left(\prod_{i=1}^{p} \phi_i \left(\frac{x_i}{R} \right) \right) F_p(\underline{x}) \, \mathrm{d}\underline{x} \simeq \int_{\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta(R)}} \prod_{I \in \mathcal{I}} \left(F_{|I|}(\underline{x}_I) \prod_{i \in I} \phi_i \left(\frac{x_i}{R} \right) \right) \mathrm{d}\underline{x}$$

$$\simeq \prod_{I \in \mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}^I_{\{I\},\eta(R)}} \left(\prod_{i \in I} \phi_i \left(\frac{x_i}{R} \right) \right) F_{|I|}(\underline{x}_I) \, \mathrm{d}\underline{x}_I .$$

Si $I = \{i, j\}$, le facteur correspondant est :

$$\int_{|x_i - x_j| \leqslant \eta(R)} \phi_i \left(\frac{x_i}{R} \right) \phi_j \left(\frac{x_j}{R} \right) F_2(x_i, x_j) \, \mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}x_j \simeq m_2(\nu_R)(\phi_i, \phi_j) = O(R).$$

Si $\mathcal{I} \in \mathcal{PP}_p$, elle contribue $\displaystyle\prod_{\{i,j\} \in \mathcal{I}} m_2(\nu_R)(\phi_i, \phi_j)$.

Partitions avec de gros clusters

Si $I = \{1, \ldots, k\}$ avec $k \geqslant 3$, le facteur correspondant est dominé par :

$$\left\| F_{|I|} \right\|_\infty \left(\prod_{i=2}^{k} \|\phi_i\|_\infty \right) \int_{\mathbb{R}^k_{\{I\},\eta(R)}} \left| \phi_1 \left(\frac{x_1}{R} \right) \right| \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k = O\Big(R\eta(R)^{k-1} \Big) .$$

Partitions avec de gros clusters

Si $I = \{1, \dots, k\}$ avec $k \geqslant 3$, le facteur correspondant est dominé par :

$$\left\| F_{|I|} \right\|_\infty \left(\prod_{i=2}^{k} \|\phi_i\|_\infty \right) \int_{\mathbb{R}^k_{\{I\},\eta(R)}} \left| \phi_1 \left(\frac{x_1}{R} \right) \right| \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_k = O\Big(R\eta(R)^{k-1} \Big).$$

Si $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$ contient exactement a paires et b parties de cardinal 3 ou plus, sa contribution est dominée par :

$$R^{a+b}\eta(R)^{p-2a-b} = R^{\frac{1}{4}(p+2a+3b)} \left(R^{-\frac{1}{4}}\eta(R) \right)^{p-2a-b} = O(R^{\frac{p}{2}})o(1)^{p-2a-b}.$$

Lorsque $b \geqslant 1$, on a $2a + b < p$ et on obtient $o(R^{\frac{p}{2}})$.

Bilan

$$m_p(\nu_R)(\phi_1, \ldots, \phi_p) = \sum_{\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p} \int_{\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta(R)}} \left(\prod_{i=1}^{p} \phi_i \left(\frac{x_i}{R} \right) \right) F_p(\underline{x}) \, \mathrm{d}\underline{x}.$$

- Si $\mathcal{I}$ contient un singleton, elle contribue $o(R^{\frac{p}{2}})$.
- Idem si $\mathcal{I}$ ne contient pas de singleton mais un cluster de cardinal $\geqslant 3$.
- Si $\mathcal{I}$ est une partition en paires, elle contribue :

$$\prod_{\{i,j\} \in \mathcal{I}} m_2(\nu_R)(\phi_i, \phi_j).$$

Singularités des fonctions à p points et clustering

Rappel

$$\rho_p(x_1,\ldots,x_p)=\frac{\mathbb{E}\left[|f'(x_1)|\ldots|f'(x_p)|\,\middle|\,f(x_1)=\cdots=f(x_p)=0\right]}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\det\Big(\operatorname{Var}(f(x_1),\ldots,f(x_p))\Big)^{\frac{1}{2}}}.$$

On veut montrer que, pour tout $\mathcal{I}\in\mathcal{P}_p$ et tout $\underline{x}\in\mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta}$:

$$\rho_p(\underline{x})=\left(\prod_{I\in\mathcal{I}}\rho_{|I|}(\underline{x}_I)\right)\left(1+O\left(\sqrt{\|\kappa\|_{2p,\eta}}\right)\right).$$

Rappel

$$\rho_p(x_1,\dots,x_p) = \frac{\mathbb{E}\left[|f'(x_1)|\dots|f'(x_p)|\,\middle|\, f(x_1)=\dots=f(x_p)=0\right]}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\det\left(\operatorname{Var}(f(x_1),\dots,f(x_p))\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

On veut montrer que, pour tout $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$ et tout $\underline{x} \in \mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta}$:

$$\rho_p(\underline{x}) = \left(\prod_{I\in\mathcal{I}} \rho_{|I|}(\underline{x}_I)\right)\left(1 + O\left(\sqrt{\|\kappa\|_{2p,\eta}}\right)\right).$$

Concentrons-nous sur $D_p : (x_1,\dots,x_p) \mapsto \det\left(\operatorname{Var}(f(x_1),\dots,f(x_p))\right)$.

Le problème avec la diagonale

Si $|x_i - x_j| > \eta$, alors $|\mathbb{E}[f(x_i)f(x_j)]| = |\kappa(x_i - x_j)| \leqslant \|\kappa\|_{0,\eta}$.
Pour $\underline{x} \in \mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta}$, on a :

$$\mathrm{Var}(f(x_i))_{1\leqslant i\leqslant p} = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(f(x_i))_{i\in I_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{Var}(f(x_i))_{i\in I_m} \end{pmatrix} + O\left(\|\kappa\|_{0,\eta}\right).$$

Donc $D_p(\underline{x}) = \left(\prod_{I\in\mathcal{I}} D_{|I|}(\underline{x}_I)\right) + O\left(\|\kappa\|_{0,\eta}\right)$.

Le problème avec la diagonale

Si $|x_i - x_j| > \eta$, alors $|\mathbb{E}[f(x_i)f(x_j)]| = |\kappa(x_i - x_j)| \leqslant \|\kappa\|_{0,\eta}$.
Pour $\underline{x} \in \mathbb{R}^p_{\mathcal{I},\eta}$, on a :

$$\mathrm{Var}(f(x_i))_{1\leqslant i\leqslant p} = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(f(x_i))_{i\in I_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{Var}(f(x_i))_{i\in I_m} \end{pmatrix} + O\Big(\|\kappa\|_{0,\eta}\Big).$$

Donc $D_p(\underline{x}) = \left(\prod_{I\in\mathcal{I}} D_{|I|}(\underline{x}_I)\right) + O\Big(\|\kappa\|_{0,\eta}\Big)$.

Le “terme dominant” s'annule si $x_i = x_j$ avec $i \neq j$ dans le même cluster !

Principale difficulté

Comprendre l'annulation de $D_p(\underline{x})$ lorsque des points coalescent.

Cas $p = 2$

Pour $x \neq y$, on a :

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ f(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & y-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \end{pmatrix}.$$

Donc, quand $y \to x$,

$$\begin{aligned} D_2(x,y) &= (y-x)^2 \det\left(\mathrm{Var}\left(f(x), \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right)\right) \\ &\sim (y-x)^2 \det\left(\mathrm{Var}(f(x), f'(x))\right) \\ &\sim (y-x)^2. \end{aligned}$$

Différences divisées

Interpolateur de Hermite

Soit $\underline{x} = (\underbrace{y_1, \ldots, y_1}_{n_1 \text{ termes}}, \ldots, \underbrace{y_m, \ldots, y_m}_{n_m \text{ termes}}) \in \mathbb{R}^p$, avec $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$ distincts.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^{p-1}(\mathbb{R})$, il existe un unique $\Pi_{\underline{x},f} \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{0, \ldots, n_i - 1\}, \qquad \Pi_{\underline{x},f}^{(j)}(y_i) = f^{(j)}(y_i).$$

Différences divisées

Interpolateur de Hermite

Soit $\underline{x} = (\underbrace{y_1, \dots, y_1}_{n_1 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{y_m, \dots, y_m}_{n_m \text{ termes}}) \in \mathbb{R}^p$, avec $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ distincts.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^{p-1}(\mathbb{R})$, il existe un unique $\Pi_{\underline{x},f} \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{0, \dots, n_i - 1\}, \qquad \Pi_{\underline{x},f}^{(j)}(y_i) = f^{(j)}(y_i).$$

Soit $f \in \mathcal{C}^{p-1}(\mathbb{R})$, on définit des fonctions $[f]_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ continues par :

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^p, \quad \Pi_{\underline{x},f}(X) = \sum_{k=1}^{p} [f]_k(x_1, \dots, x_k) \prod_{j=1}^{k-1} (X - x_j).$$

Différences divisées : exemples

- Pour tout k, $[f]_k(y, \ldots, y) = \dfrac{f^{(k-1)}(y)}{(k-1)!}$.

- Si $x_1, \ldots, x_k$ sont distincts on a $[f]_k(x_1, \ldots, x_k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod_{i \neq j}(x_j - x_i)}$.

- En général, si $x_k \neq x_{k+1}$,

$$[f]_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1}) = \frac{[f]_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}) - [f]_k(x_1, \ldots, x_k)}{x_{k+1} - x_k}.$$

Ordre d'annulation de D_p

Soient $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ distincts. On a :

$$\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & x_2 - x_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & \prod_{j=1}^{p-1}(x_p - x_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [f]_1(x_1) \\ [f]_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ [f]_p(x_1, \dots, x_p) \end{pmatrix}.$$

Quand $\underline{x} = (x_1, \dots, x_p) \to (y, \dots, y)$,

$$\begin{aligned} D_p(\underline{x}) &= \det\left(\mathrm{Var}\Big([f]_1(x_1), \dots, [f]_p(x_1, \dots, x_p)\Big)\right) \prod_{i<j}(x_j - x_i)^2 \\ &\sim \det\left(\mathrm{Var}\left(f(y), f'(y), \dots, \frac{f^{(k-1)}(y)}{(k-1)!}\right)\right) \prod_{i<j}(x_j - x_i)^2. \end{aligned}$$

The end

Merci de votre attention.